INSTITUT SUPERIEUR DE TECHNOLOGIE	
Concours d'entrée 1er cycle MAI 2006 – **Epreuve de Mathématiques**	

A remplir par le candidat : Nom : …………………………..……… Prénom : ……………..…………… Centre de passage de l'examen : ………………………… N° de place : ……….	Cadre réservé à l'IST : N° anonyme: ………..

- -

Cadre réservé à l'IST Note :	**1er cycle - Epreuve de Mathématiques - Durée : 3 heures** Les Calculatrices sont interdites. Les brouillons sont autorisés - Nombre de pages : 11 Répondre directement sur ce document à rendre à la fin de l'épreuve	Cadre réservé à l'IST N° anonyme: ………..

COMMENCEZ par inscrire vos noms et prénoms, le centre de passage de l'examen et le numéro de votre place ci-dessus.

Les surveillants ont pour consigne d'exclure du concours tout candidat qui tente de vouloir copier sur un de ses voisins, ou d'accéder à des documents quels qu'ils soient, ou d'écrire avant le signal de départ ou après le signal de fin de l'épreuve.

Consignes particulières : Soyez ordonnés en mettant toutes les parties d'un même exercice sur la feuille du document réponse correspondante.

Barème sur 40

Réponse bonne non justifiée : 0
Réponse fausse mais démarche juste : 50%
Réponse bonne avec fautes dans la justification : 0
Réponse bonne justifiée correctement : 100%

Veuillez inscrire vos réponses dans la case correspondante. **Toute réponse inscrite sur un autre support ne sera pas corrigée.**

Cette épreuve comporte TROIS PARTIES : PARTIE I, PARTIE II et PARTIE III. Respectez les instructions suivantes pour chaque partie :

→ **PARTIE I : Pour les exercices de cette partie, répondez aux questions dans les cadres.**

→ **PARTIE II : Pour les exercices de 1 à 8, chacun comporte des affirmations repérées par les lettres a), b), c), d)… Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elles sont vraies (V) ou fausses (F), Justifiez toutes vos réponses.**

Exemple Il est possible de prolonger par continuité la fonction f définie sur R^* par $f(x)=\dfrac{\cos x}{|x|}$ en 0.

F	En effet, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{|x|}=+\infty$. **Par conséquent, il est impossible de trouver une valeur finie** l telle que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{|x|}=l$

→ **PARTIE III**
Pour les exercices 9 et 10, répondez aux questions dans les cadres.

INSTITUT SUPERIEUR DE TECHNOLOGIE

Concours d'entrée 1er Cycle

NE RIEN INSCRIRE

Epreuve de Mathématiques - Durée : 3 heures

PARTIE I : Pour les exercices de cette partie, répondez aux questions dans les cadres.

Exercice 1 (7 points)

1) Calculer les dérivées par rapport à x, de u (u étant une fonction de x strictement positive de dérivée u' *et* a un réel) :

u^2

$\sqrt{u}$

$\dfrac{1}{u}$

u^a

$\ln u$

e^u

$e^{x^{10}}$

$\ln(x^2 - 2x + 5)$

2) Développer $(2a - 3b)^3$ et $\left(x + \dfrac{y}{2}\right)^4$.

3) Donner le module et un argument de :

$$z_1 = 2e^{i\frac{p}{4}}, \quad z_2 = -5e^{iq}, \quad z_3 = e^{iq}\sin q \quad (q \in R)$$

4) Calculer et donner la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{p}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{p}{3} - \dfrac{p}{4}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11p}{12}\right)$. Calculer et donner la valeur exacte de $\tan\left(\dfrac{p}{12}\right)$ *et* $\tan\left(\dfrac{7p}{12}\right)$.

INSTITUT SUPERIEUR DE TECHNOLOGIE

Concours d'entrée 1er Cycle

NE RIEN INSCRIRE

Epreuve de Mathématiques - Durée : 3 heures

5) Dans un triangle ABC rectangle en A, on note AB = c, BC = a, CA = b et q l' angle en B. Exprimer c en fonction de a et q , b en fonction de a et q , b en fonction de c et q , b en fonction de a et c.

Figure	c en fonction de a et q	b en fonction de a et q	b en fonction de c et q	b en fonction de a et c

PARTIE II **Vous devez indiquer pour chaque question si elle est vraie (V) ou fausse (F), Justifiez toutes vos réponses.**

(V ou F) **(Justification)**

Exercice 2 (1,5 points)

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = xe^{-x}$

a) Pour tout $x \in R, \quad f(x)f(-x) \leq 0$

b) Pour tout $x \in R, \quad f'(x) + f(x) = e^{-x}$

c) Pour tout $x \in R, \quad f(x) \leq 1$

.

Exercice 3 (1,5 points)

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & si \ x < 0 \\ \cos x, & si \ x \geq 0 \end{cases}$

On appelle C sa représentation graphique dans un repère du plan.

a) f est continue en 0.

b) f est dérivable en 0.

Exercice 4 (3,5 points)

a) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + 3} = 1$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(2 - x)}{x - 1} = -1$

d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x - 3} = 1$

e) $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x - 3\right) = 0$

INSTITUT SUPERIEUR DE TECHNOLOGIE

Concours d'entrée 1^{er} cycle MAI 2006 – **Epreuve de Mathématiques**

A remplir par le candidat : Nom : ……………………………..……… Prénom : ……………..…………… Centre de passage de l'examen : ………………………… N° de place : ……….	Cadre réservé à l'IST : *N° anonyme*: ………..

Cadre réservé à l'IST $2^{ème}$ copie	**1^er cycle - Epreuve de Mathématiques** - **Durée : 3 heures** Calculatrices, Documents interdits - Nombre de pages : 11 Répondre directement sur ce document à rendre à la fin de l'épreuve	Cadre réservé à l'IST *N° anonyme*: ………..

Exercice 5 (4 points)

Soit la fonction définie sur R^*_+ par :

$$f(x) = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$$

a) La dérivée f' de f est la fonction définie sur R^*_+ par :

$$f'(x) = 2\sin(\ln x)$$

b) $7\ln(\sqrt{2}+1) + 2\ln(3+\sqrt{2}) - \ln(11+6\sqrt{2}) + 7\ln(\sqrt{2}-1) = 0$

c) $\int_0^{\frac{p}{4}} \tan x dx = \frac{1}{2}\ln 2$

d) $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 4 - 2\sqrt{e}$

Exercice 6 (3 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d :

$a = -2-2i$; $b = 2$; $c = 2+4i$; $d = -2+2i$

1) ABCD est un parallélogramme.

2) Le point E, image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est un point de l'axe des abscisses.

3) Soient $f = 6i - 4$ et F le point d' affixe f.
Le triangle CDF est rectangle et isocèle en D.

<u>Exercice 7</u> (4 points)

On considère la suite complexe $(z_n)_{n \in N}$ définie par :

$$z_0 = 1 \; et, \quad pour \; tout \; n \in N, \; z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n.$$

Pour $n \in N,$ on appelle M_n le point d' affixe z_n dans le plan complexe d' origine O.

a) La suite $\left(|z_n|\right)_{n \in N}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) Pour tout $n \in N,$ $z_n = \frac{e^{in\frac{\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$

c) M_n appartient à l'axe des abscisses si, et seulement si, n est un multiple de 4.

Exercice 8 (5 points)

Dans un sondage auprès de 100 étudiants, on obtient les résultats suivants :
60 aiment le café, 50 aiment les jus, 40 aiment le thé.
40 aiment les jus et le café, 10 aiment les trois boissons.
On interroge un de ces 100 étudiants pris au hasard.

a) La probabilité qu' il aime les jus sachant qu' il aime le café est $\frac{2}{5}$.

b) La probabilité qu'il aime les trois boissons sachant qu' il aime le thé est $\frac{1}{5}$.

c) La probabilité qu'il aime les jus et le café sachant qu' il n' aime pas le thé est $\frac{1}{2}$.

d) Les données ne permettent pas de calculer la probabilité qu'il aime les jus sachant qu' il n' aime pas le café.

e) Les données ne permettent pas de calculer la probabilité qu' il aime le thé sachant qu' il aime le café.

INSTITUT SUPERIEUR DE TECHNOLOGIE

Concours d'entrée 1er Cycle

NE RIEN INSCRIRE

Epreuve de Mathématiques - Durée : 3 heures

PARTIE III : Répondez aux questions dans les cadres.

N.B. $(1{,}4)^2 = 1{,}96$.

Exercice 9 (3 points)

Une sphère creuse a pour centre O et pour rayon 5 cm. I est un point de l' un de ses diamètres [NS].
P est le plan perpendiculaire en I à la droite (NS) : la longueur OI est appelée la distance du point O au plan P ; posons : OI = h (en cm).

On appelle section S_1 de la sphère et du plan P l'ensemble des points communs à la sphère et au plan : notons M l' un de ces points.

1) Faire la représentation graphique.

2) Dans le cas où h = 4,8, quelle est la section S_1 ?

3) Dans le cas où h = 0, où est le point I ?
   Quelle est la section S_1 ?

4) Dans le cas où h = 5, où est le point I ?
   Quelle est la section S_1 ?
   Que peut-on dire du plan P par rapport à la sphère ?

Exercice 10 (7,5 points)

Partie A

1) Résoudre dans R l' équation $3e^{3x} - 7e^{2x} + 4 = 0$.

A remplir par le candidat :

Nom : …………………………..……… Prénom : ……………..…………… Centre de passage de l'examen : ………………………… N° de place : ……….	Cadre réservé à l'IST : *N° anonyme*: ………..

Cadre réservé à l'IST 3ème copie	**1er cycle - Epreuve de Mathématiques - Durée : 3 heures** Calculatrices, Documents interdits - Nombre de pages : 11 Répondre directement sur ce document à rendre à la fin de l'épreuve	Cadre réservé à l'IST *N° anonyme*: ………..

2) Etudier le signe de $3e^{3x} - 7e^{2x} + 4$ pour x appartenant à l'ensemble R.

Partie B

On considère l'équation différentielle E : $y' + 2y = 0$

1) Résoudre l'équation E ;

2) Déterminer la solution particulière f de l'équation E vérifiant $f(\ln 2) = 1$, où ln représente la fonction logarithme népérien.

Partie C

On appelle f et g les fonctions respectivement définies sur l' ensemble R par :

$$f(x) = 4e^{-2x} \quad et \quad g(x) = 7 - 3e^{x}.$$

On appelle C et C' les courbes représentatives des fonctions f et g dans le plan muni d' un repère orthogonal $\left(O;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. Unités graphiques : 3cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

1) Dresser les tableaux de variation de f et g.

2) Donner les coordonnées des points d'intersection de C et de C'.

3) Construire C et C' dans le repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

INSTITUT SUPERIEUR DE TECHNOLOGIE

Concours d'entrée 1er Cycle

NE RIEN INSCRIRE

Epreuve de Mathématiques - Durée : 3 heures

4) On désigne par P le domaine plan limité par les courbes C et C' et les droites d' équations $x = 0 \; et \;\; x = \ln 2$.

a) Hachurer P.

b) Calculer la valeur exacte, en cm^2, de l' aire de P. En donner l' arrondi au mm^2.