INSTITUT SUPERIEUR DE TECHNOLOGIE

Concours d'entrée **2nd** CYCLE – Mai 2006

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Nombre de pages : 3

Durée : 3 heures

Calculatrices et documents : calculatrices autorisées

SUJET A RENDRE A LA FIN de l'EPREUVE

COMMENCEZ par inscrire vos noms et prénoms, le centre de passage de l'examen et le numéro de votre place sur chaque copie que vous rendrez.

Les surveillants ont pour consigne d'exclure du concours tout candidat qui tente de vouloir copier sur un de ses voisins, d'accéder à des documents quels qu'ils soient, ou d'écrire avant le signal de départ ou après le signal de fin de l'épreuve

EXERCICE I (2,5pts)

Soient a et b deux éléments de R, I un intervalle ne contenant pas 0, et k une fonction continue sur I. On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y''+axy'+by=k$ (l'équation d'Euler).

1- Montrer que cette équation se ramène, par le changement de variable $t=\ln|x|$ à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. *(1pt)*

2- Application : Résoudre les équations différentielles suivantes :
$x^2y''-2y=x$ *et* $x^2y''+xy'+y=x\ln|x|$. *(0,75x2=1,5pt)*

EXERCICE II (3,5pts)

Soit f une fonction 2-périodique telle que : $\begin{cases} f(x)=0 \ si \ -1\le x\le 0 \\ f(x)=x \ si \ 0\le x<1 \end{cases}$

1- Représenter f sur l'intervalle [-4,4]. *(1pt)*

2- Déterminer les coefficients réels du développement en série de Fourier de f. *(1,5pt)*

3- En déduire la valeur exacte du nombre réel $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ *(1pt)*

EXERCICE III (4pts)

On étudie la mise en place d'un test diagnostique T qui doit révéler une maladie M et on définit les événements suivants :

T : Le test est positif ; M : la maladie est présente.

On appelle Se la sensibilité du test : $p(T/M)$, et Sp la spécificité du test : $p(\overline{T}/\overline{M})$. Le test idéal quand Se = Sp = 1.

1- Dans quels cas le test apportera-t-il une juste conclusion ? Montrer que la probabilité de cette juste conclusion est égale à : (Se - Sp).p(M) + Sp . *(1pt)*

2- Le test apporte une information intéressante si $p(M/T) > p(M)$.
Montrer qu'alors : Se + Sp > 1 *(1,5pt)*

3- Application numérique : Se = 0,94 ; Sp = 0,93. Calculer la probabilité de prédire la présence de la maladie quand le test est positif dans les deux cas suivants :

$p(M) = 0{,}02$ et $p(M) = 0{,}2$. *(1pt)*

Conclure sur l'influence de $p(M)$ sur ces résultats. *(0,5pt)*

PROBLEME (10pts)

***Partie A: Puissance n-ième d'une matrice carrée*.**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 \\ -6 & 0 & -5 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ associée canoniquement à un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 3.

1- Déterminer le polynôme caractéristique noté P (λ) de la matrice A. *(0,75pt)*

2- Déterminer les valeurs propres de la matrice qu'on notera λ_1, λ_2, λ_3 dans l'ordre croissant. *(0,75pt)*

3- Déterminer les sous espaces propres associés et en déduire une base de l'espace constituée de vecteurs propres. *(1+0,25=1,25pt)*

4- Donner l'expression de la matrice P de passage de l'ancienne base à la nouvelle base et celle de la matrice D de l'endomorphisme f dans la nouvelle.
Quelle relation existe entre les matrices A , P et D. *(0,25x3=0,75pt)*

5- Calculer P^{-1}. *(1pt)*

6- Sans exprimer A^n , ni D^n , démontrer par récurrence que : $A^n = PD^nP^{-1}$ *(1pt)*

7- Calculer D^n $\forall n \in N^*$.*(0,5pt)*

8- Calculer A^n $\forall n \in N^*$. *(0,75pt)*

Partie B : Application à la détermination des termes de suites numériques.

On considère les suite numériques $(u_n)_{n\geq 0}$; $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - v_n - 4w_n \\ v_{n+1} = -6u_n - 5w_n \\ w_{n+1} = 6u_n + v_n + 6w_n \end{cases}$$ avec : $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ *et* $w_0 = -1$.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

1- Préciser X_0 *et* X_1. *(0,75pt)*
2- A l'aide de la matrice A de la première partie de ce problème, écrire une relation entre X_n *et* X_{n+1}. *(0,75pt)*
3- Montrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$. *(1pt)*
4- En déduire les expressions de u_n , v_n et w_n en fonction de n. *(0,75pt)*