

A remplir par le candidat :

Nom : Prénom :
 Centre de passage de l'examen : N° de place :

Cadre réservé à l'IST-AC :

N° anonyme:

.....

Cadre réservé à l'IST-AC :

Note :

1^{er} cycle - Epreuve de Mathématiques - Durée : 3 heures

Cadre réservé à l'IST-AC :

N° anonyme:

.....

COMMENCEZ par inscrire vos noms et prénoms, le centre de passage de l'examen et le numéro de votre place ci-dessus.

Calculatrices et Documents interdits - Nombre de pages : 7

Répondre directement sur ce document à rendre à la fin de l'épreuve

Les surveillants ont pour consigne d'exclure du concours tout candidat qui tente de vouloir copier sur un de ses voisins, ou d'accéder à des documents quels qu'ils soient, ou d'écrire avant le signal de départ ou après le signal de fin de l'épreuve.

Consignes particulières : Un exercice comporte au plus six(6) affirmations repérées par les lettres a), b), c), d), e) et f). Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (**V**) ou fausse (**F**) **sans justifier**.

Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponses).

Toute réponse exacte rapporte 1 point.

Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point.

L'annulation d'une réponse ou l'abstention ne sont pas prises en compte, c-à-d ne rapportent ni ne retirent aucun point.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire.

Exercice 1

a) l'expression simplifiée de $\frac{e^{-x}(e^{2x} + 3e^x + 1)}{e^{-2x} + 3e^{-x} + 1}$ est e^x \longrightarrow

b) l'expression simplifiée de $\ln(e^x + e^{-x}) - \ln(e^{2x} + 1)$ est x \longrightarrow

c) Les nombres e^{x^2} et $(e^x)^2$ sont égaux pour tout réel x \longrightarrow

d) Les nombres $2e^{\frac{1}{2}x}$ et e^x sont égaux pour $x = \ln 4$ \longrightarrow

e) l'expression simplifiée de $e^{-\ln 2} - e^{\ln 7}$ est $-\frac{13}{2}$ \longrightarrow

f) l'expression simplifiée de $\frac{e^{4-\ln 3}}{e^{-1+\ln 5}}$ est $\frac{1}{15}e^4$ \longrightarrow

Exercice 2

a) On considère la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n$.

a_1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \frac{n}{(n-1)!}$

a_2 La suite u est croissante.

b) Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère du plan. (C) possède une asymptote d'équation $x = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$.

c) Soient f la fonction définie par $f(x) = 2 \ln x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère du plan. (C) possède au point d'abscisse -1 une tangente d'équation $y = -2x - 2$.

Exercice 3

a) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{3}{2n+5}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{3}{2n+6}$

b) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 2U_n - 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 2U_{n-1} - 1$

c) La suite U définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = (U_n)^2$ est une suite croissante.

d) Les trois nombres 12,7 ; 15,1 ; 17,6 sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

e) Les trois nombres 12 ; 18 ; 27 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

f) La somme $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}$ est égale à $2^{10} - 1$.

Exercice 4

a) La somme des probabilités de tous les résultats d'une expérience aléatoire est supérieure ou égale à 1. →

b) A et B sont deux événements : $P(A) = 0,2$ et $P(B) = 0,4$ On peut déduire que l'événement $A \cup B$ a pour probabilité 0,6. →

c) Quant une expérience aléatoire n'a que deux issues possibles, la probabilité de chacune est $\frac{1}{2}$. →

d) Un événement a pour probabilité 0,7. L'événement complémentaire a pour probabilité 0,3. →

e) Dans une situation d'équiprobabilité, tous les événements ont même probabilité. →

Exercice 5

a) la fonction F définie par $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x}{2}$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x \ln x$ sur \mathbb{R}_+^* →

b) Si f est définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$, alors la courbe représentative de f a pour asymptote la droite d'équation $x = 1$. →

c) Si f est définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$, alors la courbe représentative de f a au moins deux droites asymptotes. →

d) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors f est croissante sur \mathbb{R} . →

e) Si f est croissante sur \mathbb{R} , alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. →

f) Si f est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2} + 5 + x$ alors la droite d'équation $y = x + 5$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$. →

Exercice 6

a) Il existe une différence entre $\int_0^{2\pi} \sin x dx$ et l'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \sin x$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2\pi$ dans un repère orthonormal ? \longrightarrow

b) Soit m une constante. La valeur de m pour que la fonction $\begin{cases} f(x) = x^2 - 5x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 + m & \text{si } x > 0 \end{cases}$ soit continue en 0, est $m = 1$ \longrightarrow

c) On considère l'intégrale suivante avec n un entier naturel et $n > 1$:

$$I_n = \int_1^e \frac{\ln x}{x^n} dx$$

c1 on a $I_n \leq \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{e^{n-1}} \right)$ \longrightarrow

c2 On a $I_n = \frac{1 + ne^{1-n}}{(n-1)^2}$ \longrightarrow

Exercice 7

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et les fonctions f_1 et f_2 définies sur \mathbb{R} par $f_1(x) = e^{3x}$, $f_2(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}$. On appelle C_1 et C_2 leurs courbes représentatives dans un repère du plan.

a) C_1 et C_2 se coupent au point $A(\ln \lambda; 3\lambda)$. \longrightarrow

b) Quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, C_1 est au-dessus de C_2 . \longrightarrow

c) Il existe un point B en lequel C_1 et C_2 possèdent la même tangente. \longrightarrow

d) Lorsque λ est supérieur à 1, l'aire de la portion du plan comprise entre les courbes C_1 et C_2 et limitée par les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln \lambda$ est, en unités d'aire, $\frac{(\lambda-1)^2}{3}$. \longrightarrow

A remplir par le candidat :

Nom : Prénom :
 Centre de passage de l'examen : N° de place :

Cadre réservé à l'IST :
N° anonyme:

Deuxième
Copie

1^{er} cycle - Epreuve de Mathématiques - Durée : 3 heures

Cadre réservé à l'IST
N° anonyme:

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\frac{3x+2}{5x}\right)$.

On appelle D_f l'ensemble de définition de f .

a) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ _____

b) Soit g une fonction définie et dérivable sur $D_g = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{-2}{3}\right\}$ telle que quel que soit $x \in D_g$,
 $g'(x) = \frac{3}{3x+2} - \frac{1}{x}$. f et g sont égales à une constante additive près. _____

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -\frac{2}{5}$ _____

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} xf(x) = 0$ _____

Exercice 9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit la fonction f qui, à tout point M d'affixe z , z différent de 1, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{2z+1}{z-1}$.

a) f possède deux points invariants conjugués. _____

b) L'ensemble des points M d'affixes z tels que $z' \in \mathbb{R}$ est l'axe des abscisses. _____

c) L'ensemble des points M d'affixes z tels que $|z'| = 2$ est un cercle. _____

d) A tout point M' du plan d'affixe z' , on peut associer un point M d'affixe z tel que $f(M) = M'$ sauf au point M' d'affixe $z' = 2$. _____

Exercice 10

On considère un espace probabilisé fini (Ω, p) dans lequel un événement A a les trois possibilités A_1, A_2 et A_3 deux à deux distinctes de se produire et un événement B a les deux possibilités B_1 et B_2 distinctes de se produire. Le tableau suivant donne en pourcentages la probabilité de certains événements de se produire par rapport à l'univers Ω .

	A_1	A_2	A_3	Total/A
B_1		20		
B_2	30			
Total/B			10	100

On donne aussi les renseignements suivants : $p(A_2) = 60\%$ et $p_{B_1}(A_3) = \frac{1}{6}$.

- a) A_1 et B_1 sont incompatibles. →
- b) La probabilité d'obtenir B_1 est 24%. →
- c) Si A_3 est réalisé, la probabilité d'obtenir A_3 et B_1 est 4%. →
- d) La probabilité d'obtenir A_3 et B_1 est 4%. →

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}$$

et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) la dérivée de f est $f'(x) = \frac{\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{x^2 \sqrt{3}}$ →

b) La somme des abscisses de deux points d'intersection de Δ (droite d'équation $y = m$) et (C) ayant la même ordonnée est $\frac{3}{2}$. →

c) Soit m un nombre réel et soit Δ la droite d'équation $y = m$. Pour tout $m > \sqrt{2}$, on appelle A et B les points d'intersection de Δ et de (C). Soit I le milieu du segment $[AB]$.
On montre que, quand m décrit l'intervalle $]\sqrt{2}; +\infty[$, I décrit une partie de la droite D d'équation $x = \frac{\sqrt{3}}{2}y$ →

d) On construit une suite de points $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante : A_0 est le point de (C) d'abscisse 2 ; pour tout $n \geq 0$, à partir du point A_n de (C), on détermine B_n , deuxième point d'intersection de (C) avec la parallèle à $x'x$ passant par A_n , puis I_n milieu du segment $[A_n B_n]$; A_{n+1} est alors le point de (C) de même abscisse que I_n .

On appelle x_n l'abscisse de A_n . On montre que pour tout $n \geq 0$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{2x_n} \right)$$
 →