

Nombre de pages : 3

Durée : 3 heures

Calculatrices : autorisées

Documents : interdits

**SUJET A RENDRE A LA FIN
DE L'EPREUVE**

COMMENCEZ par inscrire vos noms et prénoms, le centre de passage de l'examen et le numéro de votre place sur chaque copie que vous rendrez.

Les surveillants ont pour consigne d'exclure du concours tout candidat qui tente de vouloir copier sur un de ses voisins, d'accéder à des documents quels qu'ils soient, ou d'écrire avant le signal de départ ou après le signal de fin de l'épreuve

Consignes Particulières : une attention particulière doit être portée à la présentation et à l'orthographe

Exercice I

Soit $\vec{V} = (P, Q, R)$ le champ vectoriel où $P(x, y, z) = x + \frac{z}{x^2y}$, $Q(x, y, z) = y + \frac{z}{y^2x}$ et

$$R(x, y, z) = z - \frac{1}{xy}$$

- 1) Calculer $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$. Déduisez-en que \vec{V} est un champ de gradient. **(1 point)**
- 2) Trouver f tel que $\vec{V} = \overrightarrow{grad}(f)$. **(3 points)**
- 3) Calculer ΔR . **(1 point)**

Exercice II

- 1) Résoudre l'équation différentielle $h'' = \omega h$ où $\omega > 0$ et h est une fonction à une variable réelle. **(1,5 points)**
- 2) L'équation du mouvement d'un ressort élastique est donnée par $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ où a est une constante réelle et $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction scalaire. On suppose que cette équation a une solution $V(x, t)$ de la forme $V(x, t) = g(x)f(t)$.
 - a) Montrer qu'il existe une constante β telle que $g'' = \beta g$ et $f'' = \beta a^2 f$. **(2 points)**
 - b) En supposant $\beta > 0$, en déduire une solution de g et une solution de f . **(1,5 points)**
 - c) Déduire aussi une solution de l'équation du ressort. **(1 point)**

Exercice III

On donne $E = \mathbb{R}^3$ et $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E , et f l'endomorphisme de E

représenté dans la base B par la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

- 1) Quel est le rang de $f - Id_E$. Donner sans calcul une valeur propre de f . **(2 points)**
- 2) Expliciter le polynôme caractéristique de f , déduire de ce qui précède une racine de ce polynôme. **(2 points)**
- 3) Déterminer toutes les valeurs propres de f . **(1 point)**
- 4) Diagonaliser A en trouvant la matrice de passage P de la base des vecteurs propres, puis calculer P^{-1} et vérifier que $D = P^{-1}AP$ avec D matrice diagonale des valeurs propres semblables à A . **(3 points)**

Exercice IV

Soit la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(t) = |\cos t|$.

- 1) Vérifier que h est continue sur \mathbb{R} et π -périodique. **(0,5 points)**
- 2) Représenter la courbe de h sur $[-\pi, 2\pi]$. **(0,5 points)**
- 3) Rappeler l'identité de Parseval. **(0,25 points)**
- 4) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de h . **(3,5 points)**
- 5) Étudier la convergence de la série de Fourier de h . **(1 point)**
- 6) En déduire les sommes des séries numériques suivantes : **(1,25 points)**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} ; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$$

On remarquera que $\forall a, b \in \mathbb{R}, \cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$.

Exercice V

Calculer l'intégrale double $T = \iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2)$ où \mathcal{D} est la couronne comprise entre les circonférences $x^2 + y^2 = e^2$ et $x^2 + y^2 = e^4$ (faire une figure de \mathcal{D}).

Donner une interprétation de T . **(2,5 points)**

Exercice VI

La durée de vie d'une ampoule électrique, mesurée en heures, est une variable aléatoire positive X , donc la fonction densité de probabilité est $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, pour $x > 0$ (avec λ réel positif).

- 1) Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité et calculer sa fonction de répartition. **(2 points)**
- 2) Calculer λ sachant que la durée de vie moyenne d'une ampoule est de 2000h. **(1 point)**
- 3) En déduire la probabilité qu'une lampe dure plus de 2000h. **(0,5 point)**