INSTITUT SUPERIEUR DE TECHNOLOGIE D'AFRIQUE CENTRALE

Concours d'entrée 1^er^ cycle MAI 2009 – **Epreuve de Mathématiques**

A remplir par le candidat : Nom : …………………………..……… Prénom : ………………..…………. Centre de passage de l'examen : ………………………… N° de place : ……….	Cadre réservé à l'IST : *N° anonyme:* ………..

Cadre réservé à l'IST-AC : Note :	**1er cycle - Epreuve de Mathématiques - Durée : 3 heures**	Cadre réservé à l'IST *N° anonyme:* ………..

COMMENCEZ par inscrire vos noms et prénoms, le centre de passage de l'examen et le numéro de votre place ci-dessus.

Calculatrices et Documents interdits - Nombre de pages : 6
Répondre directement sur ce document à rendre à la fin de l'épreuve

Les surveillants ont pour consigne d'exclure du concours tout candidat qui tente de vouloir copier sur un de ses voisins, ou d'accéder à des documents quels qu'ils soient, ou d'écrire avant le signal de départ ou après le signal de fin de l'épreuve.

Consignes particulières : Un exercice comporte au plus six(6) affirmations repérées par les lettres a), b), c), d), e) et f). Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie **(V)** ou fausse **(F)** **sans justifier.**

Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponses).

Toute réponse exacte rapporte 1 point.

Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point.

L'annulation d'une réponse ou l'abstention ne sont pas prises en compte, c-à-d ne rapportent ni ne retirent aucun point.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire.

Exercice 1

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in R^*, \quad f(x) = 2x - |x|.\ln(x^2) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(V ou F)

a) L'expression de $f(x)$ pour $x \in R_-^*$ est : $f(x) = 2x + 2x\ln(-x)$ ⟶ ☐

b) La fonction f n'est pas continue au point 0 ⟶ ☐

Epreuve de Mathématiques - Durée : 3 heures

Exercice 2

Soit les fonctions numériques f *et* g telles que :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \qquad g(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

a) f est définie sur R ⟶ ☐

b) La dérivée de f par rapport à x est : $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ ⟶ ☐

c) La fonction g est définie sur $R - \{1\}$ ⟶ ☐

d) La dérivée de g par rapport à x est : $\dfrac{1}{1-x^2}$ ⟶ ☐

Exercice 3

Soit la fonction $f : x \to x - \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

a) La fonction f est définie sur R ⟶ ☐

b) On démontre que f est une fonction impaire ⟶ ☐

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \;\; et \;\; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ⟶ ☐

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \;\; et \;\; \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ ⟶ ☐

e) la dérivée de f est $\forall x \in R^*$, $f'(x) = \left(\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)^2$ ⟶ ☐

Exercice 4

a. Soient $f, g \; et \; h$ trois fonctions définies sur R. On suppose que, quel que soit $x \in R$, on a : $f(x) \le g(x) \le h(x)$, que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 5$.
Alors $g(x)$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et cette limite est comprise entre 3 et 5. ⟶ ☐

b. Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère du plan. (C) possède une asymptote d'équation $x = 0 \; et \; \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$ ⟶ ☐

c. La fonction F définie par $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x}{2}$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x \ln x$ sur R_+^* ⟶ ☐

d. Soient f la fonction définie par $f(x) = 2\ln x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère du plan. (C) possède au point d'abscisse -1 une tangente d'équation $y = -2x - 2$ ⟶ ☐

Exercice 5

Le module et l'argument des nombres complexes suivants sont :

$a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad |a| = 1 \quad \arg(a) = \frac{\pi}{6}$ ⟶ ☐

$b = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ $\quad |b| = 1 \quad \arg(b) = -\frac{\pi}{4}$ ⟶ ☐

$c = -1 + i$ $\quad |c| = \sqrt{2} \quad \arg(c) = \frac{6\pi}{8}$ ⟶ ☐

$d = \sqrt{3} + i$ $\quad |d| = 2 \quad \arg(d) = \frac{\pi}{3}$ ⟶ ☐

$e = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ $\quad |e| = 2$ *et* $\arg(e) = \frac{\pi}{6}$ ⟶ ☐

Exercice 6

En 1798, dans son essai sur le principe de la population, Malthus, estimant que l'évolution de la subsistance et celle de la population sont différentes, explique que le monde court à sa perte.

1. On suppose que, dans une société, la subsistance augmente de 50 unités toutes les décennies
On désigne par u_0 la subsistance initiale, $u_0 = 100$
On désigne par u_n la subsistance au bout de n décennies.
Alors :
a. $u_{10} = 600$ ⟶ ☐
b. $u_{20} = 1000$ ⟶ ☐
c. $u_{30} = 1600$ ⟶ ☐

2. On suppose que, dans cette même société, la population augmente de 20% toutes les décennies.
On désigne par v_0 la population initiale, $v_0 = 25$.
on désigne par v_n la population au bout de n décennies.
a. $v_{10} = 150$ à 1 unité près ⟶ ☐
b. $v_{20} = 958$ à 1 unité près ⟶ ☐
c. $v_{30} = 5934$ à 1 unité près ⟶ ☐

3. La relation alimentaire par personne est le quotient de la subsistance par la population. On désigne par r_n la ration alimentaire par personne au bout de n décennies :

Alors, pour tout entier naturel n, $r_n = 2 \times \frac{n+2}{(1,2)^n}$ ⟶ ☐

INSTITUT SUPERIEUR DE TECHNOLOGIE D'AFRIQUE CENTRALE

Concours d'entrée 1er Cycle

NE RIEN INSCRIRE

Epreuve de Mathématiques - Durée : 3 heures

Exercice 7

Soit a, b, c trois nombres réels. On note f l'application de R dans R définie par :

$$\forall x \in R,\ f(x) = a\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c$$

1. On démontre que : $\forall n \in N^*, \quad \forall x \in R,$

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \left[a\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{n\pi}{2}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

sachant que $f^{(n)}$ désigne la fonction dérivée n-ième de f .

2. On pose $\forall n \in N^* \quad u_n = \frac{1}{4^n} f^{(2n)}(0)$

a) On démontre que (u_n) est une suite géométrique

b) La raison de cette suite est $\frac{\pi^2}{16}$

c) premier terme $u_1 = a\left(\frac{\pi^2}{16}\right)$

d) La somme $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de n et de a est :

$$S_n = \frac{a\pi^2}{16+\pi^2}\left[-1 + \left(-\frac{\pi^2}{16}\right)^n\right]$$

Exercice 8

Le calcul des intégrales suivantes donne :

a) $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx = 2\left(\sqrt{1+e} + \sqrt{2}\right)$

b) $I_2 = \int_0^1 \frac{(2x+1)}{x^2+x+1}dx = \ln(3)$

c) $I_3 = \int_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}^{(\pi)^2} \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = -2$

A remplir par le candidat :	Cadre réservé à l'IST :
Nom : ……………………………..……… Prénom : ……………….…………..	N° anonyme:
Centre de passage de l'examen : ………………………… N° de place : ……….	………..

Cadre réservé à l'IST-AC : Note :	**1er cycle - Epreuve de Mathématiques - Durée : 3 heures**	Cadre réservé à l'IST N° anonyme: ………..

d) $I_4 = \int_0^1 \frac{x^2 + 2x}{\left(\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1}\right)^3} dx = \frac{2}{3}\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{5}\right)$ ⟶ ☐

e) $I_5 = \int_1^x t\ln(t)dt = \quad \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}$ ⟶ ☐

Exercice 9

On considère la suite réelle (u_n) définie sur N^* par $u_n = \frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$

soit (v_n) la suite réelle définie sur N^*, par $v_n = \ln(u_n)$.

On montre que : $v_n = \frac{1}{n}\sum_{p=n+1}^{p=3n} \ln\left(\frac{p}{n}\right)$ ⟶ ☐

Exercice 10

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soient A le point d'affixe $a = 1 - i$ et B le point d'affixe $b = 2i - 3$.

A tout point M d'affixe z, $z \neq b$, on associe le point M' d'affixe

$$Z = \frac{z - 1 + i}{z + 3 - 2i}$$

a) L'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit réel est le segment $[AB]$. ⟶ ☐

b) Pour tout z différent de $-3 + 2i$ et de $-3 - 2i$, on obtient la forme algébrique de Z par le calcul :

$$\frac{(z - 1 + i)(z + 3 + 2i)}{(z + 3 - 2i)(z + 3 + 2i)}$$ ⟶ ☐

c) L'ensemble des points M d'affixe z tels que M' soit un point de l'axe des ordonnées est le cercle d'équation $(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ sauf le point B. $\longrightarrow$ ☐

d) Soit z_0 une solution de l'équation $\frac{z-1+i}{z+3-2i} = i$ (on admet l'existence d'une telle solution).
Le point M_0 d'affixe z_0 est un point de la médiatrice de $[AB]$. $\longrightarrow$ ☐

Exercice 11

On s'intéresse à la production d'un arbre fruitier donné. On sait que, lors de l'année 2000 , l'arbre a donné une bonne récolte.
Pour tout entier $n \in N$, on note :

* B_n l'événement << l'arbre donne une bonne récolte durant l'année 2000+n >>,

* M_n l'événement << l'arbre donne une mauvaise récolte durant l'année 200+n >>.

Si, lors de l'année 200+n, l'arbre donne une bonne récolte, l'année suivante, il donne une bonne récolte avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
Si par contre, lors de l'année 2000+n, l'arbre donne une mauvaise récolte, l'année suivante, il donne une bonne récolte avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Pour tout entier $n \in N$, on note p_n la probabilité de l'événement B_n et q_n la probabilité de l'événement M_n . Pour tout entier $n \in N$, on trouve les probabilités suivantes :

a. $P(B_{n+1} \cap B_n) = \frac{2}{3} p_n$ $\longrightarrow$ ☐

b. $P(B_{n+1} \cap M_n) = \frac{1}{3} q_n$ $\longrightarrow$ ☐

c. $P_{n+1} = \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{3} q_n$ $\longrightarrow$ ☐

d. $q_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{2}{3} q_n$ $\longrightarrow$ ☐