INSTITUT SUPERIEUR DE TECHNOLOGIE

Concours d'entrée 1er CYCLE – Mai 2005

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

SUJET A RENDRE A LA FIN de l'EPREUVE

Nombre de pages : 4

Durée : 3 heures

Calculatrices et documents : interdits

COMMENCEZ par inscrire vos noms et prénoms, le centre de passage de l'examen et le numéro de votre place sur chaque copie que vous rendrez.

Les surveillants ont pour consigne d'exclure du concours tout candidat qui tente de vouloir copier sur un de ses voisins, d'accéder à des documents quels qu'ils soient, ou d'écrire avant le signal de départ ou après le signal de fin de l'épreuve

Consignes Particulières : Indiquez clairement l'exercice que vous faites en encadrant le numéro. Soyez ordonnés en mettant toutes les parties d' un même exercice au même endroit.
Barème : Réponse bonne non justifiée : 0
Réponse fausse mais démarche juste : 50%
Réponse bonne avec fautes dans la justification : 0
Réponse bonne justifiée correctement : 100%

PARTIE 1

Pour les exercices 1 à 10, répondez par Vrai ou Faux, Justifiez toutes vos réponses.

Exemple :

Il est possible de prolonger par continuité la fonction f définie sur 3* par $f(x) = \dfrac{\cos x}{|x|}$ en 0.

Réponse : Faux

En effet, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{|x|} = +\infty$ **. Par conséquent, il est impossible de trouver une valeur** finie λ telle que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{|x|} = l$.

Exercice1*(3 points)*

a) On considère la fonction f définie sur 3 par $f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

La dérivée seconde de f est :

$$f''(x) = \frac{-3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$$

b) La fonction f définie par f(x) = $2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sin^2 2x$ est constante.

Exercice 2 ***(2 points)***

On considère une suite géométrique de premier terme 9, de raison strictement positive x, telle que la somme des logarithmes des 6 premiers termes soit égale à la moyenne arithmétique des logarithmes des 9 termes suivants.

Alors la raison de cette suite est $\frac{1}{9}$

Exercice3 ***(3 points)***

a) L' ensemble des solutions de l' équation :

$$\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln 96, \text{ est } S = \{7\}$$

b) l' ensemble des solutions de l' équation :

$$2\ln^3 x + \ln^2 x - 5\ln x + 2 = 0 \quad \text{est } S = \{e\ ;\ \sqrt{e}\ ;\ e^{-2}\}$$

Exercice 4 ***(4 points)***

a) soit le système, où x et y sont des réels :

$$\begin{cases} x + y^2 = 29 \\ \ln x + 2\ln y = 2\ln 10 \end{cases}$$

Alors, les solutions de ce système sont (4 ;5) et (25 ;2)

b) Considérons dans 3 l' équation $\ln(x^2+2x-7) = 3\ln(x-1)$.

Alors, les solutions de cette équation sont 2 et 3.

Exercice 5 ***(4 points)***

a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+3)^x}{x^{x+4}} = 0$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x - 1} - x\right) = +\infty$$

Exercice 6 ***(4 points)***

a) Une urne contient trois boules blanches (bb) et deux boules noires (bn).
On tire simultanément deux boules.
Les événements << Les deux boules tirées sont blanches>> (B) et <<Les deux boules tirées sont noires>> (N), sont indépendants.

b) On dispose de deux urnes U_1 et U_2 composées uniquement de boules blanches et de boules noires (sachant que le choix de l' une ou l' autre urne est équitable).
Dans U_1 il y a 45% de bb et dans U_2 il y a 60% de bb.
On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne au hasard.
Alors, la probabilité qu' elle soit blanche est 0,525.

Exrcice7 ***(2 points)***

Le premier terme d'une suite arithmétique (U_n) est $U_1 = -11$, sa raison est 13.
Alors tous les termes de cette suite compris entre 1983 et 2050 sont :1991, 2004, 2017, 2030, 2043.

Exercice8 ***(4 points)***

a) Les solutions dans 3 de l' équation :

$$e^x + 10\,e^{-2x} = 4 + 7\,e^{-x} \quad \text{(E), sont 0 et ln5.}$$

b) L' ensemble des solutions de l' inéquation :

$$e^{2x} - e^{x+2} - e^{2-x} + 1 < 0 \quad \text{(E')}$$

est $]-\infty\,;\,2[$.

Exercice9 ***(5 points)***

a) Les formes algébriques des solutions des équations suivantes :

(1) $(1+2i)z = 3z - 5i + 2$

(2) $z - (5+2i)\bar{z} = 2z - 5i$

Sont respectivement : $-\dfrac{7}{4} + \dfrac{3}{4}i$ et $\dfrac{5}{14} - \dfrac{15}{14}i$

b) La linéarisation de $\cos^3\theta$ et $\sin^3\theta$ donne respectivement : $\dfrac{3}{4}\cos q + \dfrac{1}{4}\cos 3q$ et $\dfrac{3}{4}\sin q - \dfrac{1}{4}\sin 3q$.

Exercice10 ***(5 points)***

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x-1}{(x-2)(x-3)}dx = 13\ln 2 - 8\ln 3$

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1}dx = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 3$

PARTIE 2

Pour les exercices 11 et 12, répondez aux questions.

Exercice11 ***(7 points)***

On considère la suite (u_n) définie sur ∠ par $u_0 = 6$; $u_1 = 1$; pour tout n de ∠,

$$u_{n+2} = \tfrac{1}{3}u_{n+1} + \tfrac{2}{3}u_n \qquad (1).$$

1° Calculer u_n pour $n \in \{2, 3, 4, 5\}$.
2° a) Démontrer qu' il existe deux suites géométriques définies sur ∠ de raison r' et r'', et de même premier terme 1, satisfaisant à la relation de récurrence (1).
b) Déduisez-en λ et μ pour que l' on ait, pour tout n : $u_n = \lambda r'^n + \mu r''^n$.(on prendra r'' la plus petite valeur.)
Exprimer u_n en fonction de n.

3° Soit (v_n) la suite définie sur ∠ par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Donner la nature de la suite (v_n).

b) Calculer u_n en fonction de n et retrouver ainsi l' expression de u_n trouvée dans 2° b).

4° a) Calculer la limite de (u_n).

b) Calculer $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

c) Préciser la limite de la suite (s_n).

<u>Exercice 12</u> ***(7 points)***

Soit a, b, c trois nombres réels. On note f l' application de 3 dans 3 définie par :

$\forall x \in 3$, $f(x) = a\cos\left(\dfrac{p\,x}{2}\right) + b\sin\left(\dfrac{p\,x}{2}\right) + c$

1° Démontrer que $\forall n \in \angle^*$, $\forall x \in 3$,

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{p}{2}\right)^n \left[a\cos\left(\frac{p\,x}{2} + \frac{np}{2}\right) + b\sin\left(\frac{p\,x}{2} + \frac{np}{2}\right)\right]$$

Sachant que $f^{(n)}$ désigne la fonction dérivée $n^{\text{-ième}}$ de f.

2° On pose $\forall n \in \angle^*$, $u_n = \dfrac{1}{4^n} f^{(2n)}(0)$.

a) Donner la nature de la suite (u_n).

b) Préciser la limite de la suite (u_n).

3° a) Calculer $s_n = u_1 + ... + u_n$ en fonction de n et de a.

c) Préciser la limite de la suite (s_n).