INSTITUT SUPERIEUR DE TECHNOLOGIE

Concours d'entrée 1er cycle MAI 2007 – **Epreuve de Mathématiques**

A remplir par le candidat :	Cadre réservé à l'IST :
Nom : ………………………………..……… Prénom : ………………….…………	N° anonyme:
Centre de passage de l'examen : ………………………… N° de place : ………	………..

Cadre réservé à l'IST	**1er cycle - Epreuve de Mathématiques - Durée : 3 heures**	Cadre réservé à l'IST
Note :	Calculatrices et Documents interdits - Nombre de pages : 5	N° anonyme:
	Répondre directement sur ce document à rendre à la fin de l'épreuve	………..

COMMENCEZ par inscrire vos noms et prénoms, le centre de passage de l'examen et le numéro de votre place ci-dessus.

Les surveillants ont pour consigne d'exclure du concours tout candidat qui tente de vouloir copier sur un de ses voisins, ou d'accéder à des documents quels qu'ils soient, ou d'écrire avant le signal de départ ou après le signal de fin de l'épreuve.

Consignes particulières : **L'usage de la calculatrice est interdit** ainsi que tout document ou formulaire.
Un exercice comporte au plus 5 affirmations repérées par les lettres a), b), c), d) et e).
Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie **(V)** ou fausse **(F) sans justifier**.
Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des 5 affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponses).
Toute réponse exacte rapporte 1 point.
Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point.
L'annulation d'une réponse ou l'abstention ne sont pas prises en compte, c-à-d ne rapportent ni ne retirent aucun point.
L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire.

Exercice 1

a. En général $3x^4 = x^3$ entraîne $x = 0$ et $x = \frac{1}{3}$ ----------→ ☐

b. En général $x^4 - 2x^3 = -x^2$ entraîne $x = 0$ et $x = 1$ ----------→ ☐

c. En général $28x^2 - 17x - 3 = 0$ entraîne $x = -\frac{1}{7}$ et $x = \frac{3}{4}$ ----------→ ☐

d. Un étudiant a lu un livre de 150 pages en 5 jours. Chaque jour, il a lu 10 pages de plus que la veille. Le nombre de pages lu le 3^e jour est : 30 ----------→ ☐

e. $\frac{3-2x}{2} > -\frac{x+6}{4}$ entraîne $x > 4$ ----------→ ☐

Epreuve de Mathématiques - Durée : 3 heures

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = x^2 + 2x + 3$

a. L'image de $-\dfrac{1}{2}$ est : 2,25 ---------→ ☐

b. L'image de 10^2 est : 10204 ---------→ ☐

c. L'image de $-\sqrt{3}$ est : $-2\sqrt{3}$ ---------→ ☐

d. Les seuls antécédents de 3 sont : 0 et -2. ---------→ ☐

Exercice 3

b- L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \ln^2 x$ est R_+ ---------→ ☐

c- La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln^2 x$ est $\dfrac{2\ln x}{x}$ ---------→ ☐

d- L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln x + 1}$ est R^*_+ ---------→ ☐

e- La dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln x + 1}$ est $\dfrac{1}{x(\ln x + 1)^2}$ ---------→ ☐

Exercice 4

a- L'intégrale $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$ est négative ---------→ ☐

b- L'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \tan^3 x dx$ est négative ---------→ ☐

c- L'intégrale $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} x \cos 3x dx$ vaut $\dfrac{2}{9}$ ---------→ ☐

d- Les primitives de la fonction $x \mapsto \tan^2 x$ sont de la forme : $x \mapsto \tan x - x + \lambda$ ---→ ☐

e- Les primitives de la fonction $x \mapsto \cos^3 x$ sont de la forme : $\dfrac{1}{12}\sin 3x + \dfrac{3}{4}\sin x + \lambda$ -→ ☐

Exercice 5

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère les complexes z_1 de module 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$, $z_2 = \overline{z_1}$ et $z_3 = 1 + i$.

a. $\left|\dfrac{z_3^8 . z_1^9}{z_2^{11}}\right| = 4$ ---------→ ☐

b. $\dfrac{z_1^4 . z_2^7}{z_3^6}$ est un réel. ---------→ ☐

c. $(z_1 - z_3)^4 = 28 - 16\sqrt{3}$. --→ ☐

Exercice 6

Soit la fonction définie sur $]-\infty;0] \cup [1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$$

a) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$ --→ ☐

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = 0$ --→ ☐

c) la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe de f. ------------→ ☐

d) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ --→ ☐

e) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} [f(x) - 2x] = 0$ --→ ☐

Exercice 7

Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = e^{-x}\sin x$.

On suppose que la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x)$ est une solution de l'équation différentielle (E).

a. f est dérivable sur R et pour $x \in R$, $f'(x) = e^{-x}\cos x$ ------------------→ ☐

b. Pour $n \in N$, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f'(x)dx = \frac{(-1)^n}{2}e^{-n\pi}\left(e^{-\pi} + 1\right)$ --------------------------→ ☐

c. f est l'unique solution de l'équation (E) qui s'annule en 0. ----------------→ ☐

d. Si g est une solution de (E), la courbe représentant g possède une tangente au point d'abscisse 0 dont une équation est donnée par $y = (1 - 2x)g(0)$. ------------------------→ ☐

Exercice 8

Soit le nombre complexe $z = 1 + i$.

a. $\dfrac{z^3}{\bar{z}} = \dfrac{1}{2}z^4$. --→ ☐

b. $\dfrac{\bar{z}}{z^3} \in R$. --→ ☐

c. $\dfrac{\bar{z}^{-4}}{z^2}$ est imaginaire pur. --→ ☐

d. Il existe $n \in N$ tel que z^n soit un réel strictement négatif. ----------------→ ☐

e. Il existe $n \in N$ tel que $\arg(z^n) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$. ----------------→ ☐

Exercice 9

a. 17+20+23+…+62 = 632 ----------------→ ☐

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{8} \mathrm{X} \frac{127}{128}$. ----------------→ ☐

c) Soit $n \in N^*$. On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et, pour tout $x > 1$, on a :

$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}$. ----------------→ ☐

Exercice 10

Pour tout $n \in N^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

a. $I_1 = \ln 2$. ----------------→ ☐

b. Pour tout $n \in N^*$, on a $I_n \geq 0$. ----------------→ ☐

c. Pour tout $n \in N^*$, on a $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. ----------------→ ☐

d. La suite $(I_n)_{n \in N^*}$ est croissante. ----------------→ ☐

Exercice 11

Pour tout entier n non nul, on pose : $I_n = \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{2\ln t}{t} dt$.

a. Pour $n \in N^*$, $I_n = 2n - 1$ ----------------→ ☐

b. La suite $(I_n)_{n \in N^*}$ est bornée. ----------------→ ☐

c. La suite $\left(\frac{I_n}{n}\right)_{n\in N^*}$ est convergente. ------------------------------------▸ ☐

d. Pour $n \in N^*$, on a : $I_1 + I_2 + ... + I_n = n^2$ ------------------------------▸ ☐

Exercice 12

Une entreprise dispose de deux machines, appelées machine <<A>> et machine <<B>> pour fabriquer le même type de pièces.

Certaines des pièces produites sont écartées comme défectueuses :
-Pour la machine <<A>> la probabilité d'obtenir une pièce sans défaut est 0,9 ;
- pour la machine <<B>> cette probabilité est 0,95.
La machine <<A>> fournit les deux tiers de la production.

a. On choisit une pièce au hasard, avec équiprobabilité des choix.
Soit S l'événement :<<la pièce est sans défaut>>.

La probabilité de S est $\frac{11}{12}$ ---▸ ☐

b.On considère les échantillons de 7 pièces produites par l'entreprise et la variable aléatoire X qui à chaque échantillon associe le nombre de pièces sans défaut. On admet que X suit une loi binomiale

b.1 La probabilité que l'échantillon ne comporte que des pièces sans défaut est : $\left(\frac{11}{12}\right)^7$ --▸ ☐

b.2 La probabilité que l'échantillon comporte exactement 6 pièces sans défaut est :

$7X\left(\frac{11}{12}\right)^6 X\frac{3}{12}$ --▸ ☐

b.3 La probabilité d'avoir au moins 2 pièces défectueuses dans l'échantillon est : $1+\frac{1}{3}\left(\frac{11}{12}\right)^6$ --▸ ☐