# INSTITUT SUPERIEUR DE TECHNOLOGIE

Concours d'entrée $2^{nd}$ CYCLE – Mai 2007

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Nombre de pages : 2

Durée : 3 heures

Calculatrices : autorisées
Documents : interdits

**SUJET A RENDRE A LA FIN DE L'ÉPREUVE**

COMMENCEZ par inscrire vos noms et prénoms, le centre de passage de l'examen et le numéro de votre place sur chaque copie que vous rendrez.

Les surveillants ont pour consigne d'exclure du concours tout candidat qui tente de vouloir copier sur un de ses voisins, d'accéder à des documents quels qu'ils soient, ou d'écrire avant le signal de départ ou après le signal de fin de l'épreuve.

**Exercice I. (8 points)** I- Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le déterminant de $M$. En déduire que la matrice $M$ est inversible. (2 pts)
2) Soient $x_1, y_1$ et $z_1$ des nombres réels. Que peut-on dire du système:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3z = x_1 \\ x - y + 2z = y_1 \\ -x - 2y + 2z = z_1 \end{cases}$$

où $x, y, z$ sont des nombres réels? Le résoudre. (1.5 pts)
3) En déduire $M^{-1}$. (1.5 pts)

II- Résoudre l'équation différentiel linéaire du second ordre à coefficients constants: $\ddot{x}(t) - 6\dot{x}(t) + 8x(t) = 8t^2 + 4t + 3$ où $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ et $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$. (3 pts)

**Exercice II. (8 points)** 1) Une entreprise fabrique des pièces et chaque pièce peut avoir deux défauts de fabrications seulement: un défaut de diamètre et un défaut de longueur. Une étude statisque permet d'admettre que pour une pièce choisi au hasard dans la production d'une journée, la probabilité de l'événement $A$ : "La pièce possède un défaut de diamètre" est $P(A) = 0.02$ et la probabilité de l'événement $B$ : "La pièce possède un défaut de longueur" est $P(B) = 0.03$

On admet que les événements $A$ et $B$ sont indépendants. Calculer à $10^{-4}$ près, la probabilité de chacun des événements suivants:

a) $E_1$ : "La pièce possède deux défauts." (1 pt)

b) $E_2$ : "La pièce possède au moins un défaut." (1.5 pts)

c) $E_3$ : "La pièce possède aucun des deux défauts." (1 pt)

2) Calculer l'intégrale triple suivante: $I = \iiint_V e^z dxdydz$ où $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x + y\}$. (1.5 pts)

3) Etudier la convergence de la série numérique: $\sum (1 + \frac{2}{n})^{n^2}$. (1.5 pts)

4) Déterminer le rayon de convergence de la série suivante: $\sum \frac{2+3n+n^2}{n!} x^n$. (1.5 pts)

---

**Problème (14 points)** Soit la suite $(u_n)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n e^{-\pi} - 1}{1+n^2}$.

1) Montrer que $|u_n|$ est majorée par une expression simple de $n^2$ et en déduire que la série $\sum |u_n|$ est convergente. (2 pts)

2) Calculer les intégrales $K = \int_0^\pi e^{-t} cosnt dt$ et $J = \int_0^\pi e^{-t} sinnt dt$. Puis les exprimer en fonction de $u_n$. (4 pts)

3) Soit la fonction $f$ périodique de période $2\pi$, définie par:

$$f(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} \text{ si } t \in [0, \pi] \\ 0 \text{ si } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

i) Tracer sa courbe représentative pour $t \in [-\pi, 3\pi]$. (1.5 pts)

ii) Calculer les coéfficients de fourrier de $f$. Donner les résultats suivant la parité de $n$. (4.5 pts)

iii) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (2 pts).